अध्याय 1

संबंध एवं फलन

1.1 समग्र अवलोकन (Overview)

1.1.1 संबंध

किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में संबंध R कार्तीय गुणन $A \times B$ का एक उप-समुच्चय होता है। समुच्चय A से समुच्चय B में संबंध R के क्रमित युग्मों के सभी प्रथम घटकों के समुच्चय को संबंध R का प्रांत कहते हैं। समुच्चय A से समुच्चय B में संबंध R के क्रमित युग्मों के सभी द्वितीय घटकों के समुच्चय को संबंध R का परिसर कहते हैं। संपूर्ण समुच्चय B संबंध R का सह-प्रांत कहलाता है। नोट कीजिए कि परिसर सदैव सह-प्रांत का एक उप-समुच्चय होता है।

1.1.2 संबंधों के प्रकार

किसी समुच्चय A से A में संबंध R, $A \times A$ का एक उप-समुच्चय होता है। अत: रिक्त समुच्चय ϕ तथा $A \times A$ (स्वयं), दो अन्त्य (extreme) संबंध हैं।

(i) किसी समुच्चय A पर परिभाषित संबंध R एक रिक्त संबंध कहलाता है, यदि A का कोई भी अवयव A के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं है, अर्थात् $R = \phi \subset A \times A$

(ii) किसी समुच्चय A पर परिभाषित संबंध R, एक सार्वत्रिक (universal) संबंध कहलाता है, यदि A का प्रत्येक अवयव A के सभी अवयव से संबंधित हैं, अर्थात् $R = A \times A$

(iii) समुच्चय A पर संबंध R स्वतुल्य (reflexive) कहलाता है, यदि सभी $a \in A$ के लिए aRa R सममित (symmetric) कहलाता है, यदि $\forall\ a, b \in A$ के लिए $aRb \Rightarrow bRa$ तथा यह संक्रामक (transitive) कहलाता है, यदि $\forall\ a, b, c \in A$ के लिए aRb तथा $bRc \Rightarrow aRc$ कोई भी संबंध, जो स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है, एक तुल्यता (equivalence) संबंध कहलाता है।

टिप्पणी किसी तुल्यता-संबंध का एक महत्वपूर्ण गुण यह है कि वह सबंद्ध समुच्चय को युगलत: असंयुक्त उप-समुच्चयों में विभाजित कर देता है जिन्हें तुल्यता-वर्ग कहते हैं तथा जिनका संग्रह समुच्चय का विभाजन (partition) कहलाता है। नोट कीजिए कि सभी तुल्यता-वर्गों के सम्मिलन से संपूर्ण समुच्चय प्राप्त होता है।

1.1.3 फलनों के प्रकार

(i) कोई फलन $f : X \rightarrow Y$ एकैकी (one-one) [या एकैक (injective)] फलन कहलाता है, यदि

f के अंतर्गत X के भिन्न-भिन्न अवयवों के प्रतिबिंब भी भिन्न-भिन्न होते हैं, अर्थात्

$$x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

(ii) फलन $f: X \to Y$ आच्छादक (onto) [या आच्छादी (surjective)] कहलाता है, यदि f के अंतर्गत Y का प्रत्येक अवयव, X के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिंब है, अर्थात् प्रत्येक $y \in Y$ के लिए, X में एक ऐसे अवयव x का अस्तित्व है कि $f(x) = y$

(iii) फलन $f: X \to Y$ एक एकैकी तथा आच्छादक [या एकैकी आच्छादी (bijective)] कहलाता है, यदि f एकैकी तथा आच्छादक दोनों ही होता है।

1.1.4 फलनों का संयोजन

(i) मान लीजिए कि $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ दो फलन हैं। तब f तथा g का संयोजन, $g\, o\, f$, द्वारा निरूपित फलन $g\, o\, f: A \to C$ निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है:

$$g\, o\, f\,(x) = g\,(f\,(x)),\ \forall\ x \in A$$

(ii) यदि $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ एकैकी हैं, तो $g\, o\, f: A \to C$ भी एकैकी होता है

(iii) यदि $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ आच्छादक हैं, तो $g\, o\, f: A \to C$ भी आच्छादक होता है।

तथापि, उपर्युक्त कथित नियम (परिणाम) (ii) तथा (iii) के विलोम आवश्यक रूप से सत्य नहीं होते हैं। इसके अतिरिक्त इस संबंध में निम्नलिखित नियम (परिणाम) हैं।

(iv) मान लीजिए कि $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ दो दिए हुए फलन इस प्रकार हैं कि $g\, o\, f$ एकैकी है, तो f भी एकैकी है।

(v) मान लीजिए कि $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ दो दिए हुए फलन इस प्रकार हैं कि $g\, o\, f$ आच्छादी है, तो g भी आच्छादी है।

1.1.5 व्युत्क्रमणीय फलन

(i) कोई फलन $f: X \to Y$ व्युत्क्रमणीय होता है, यदि एक फलन $g: Y \to X$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $g\, o\, f = I_x$ तथा $f\, o\, g = I_Y$. फलन g को फलन f का प्रतिलोम कहते हैं तथा प्रतीक f^{-1} से निरूपित करते हैं।

(ii) एक फलन $f: X \to Y$ व्युत्क्रमणीय होता है, यदि और केवल यदि f एकैकी आच्छादी है।

(iii) यदि $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ तथा $h: Z \to S$ तीन फलन हैं, तो $h\, o\, (g\, o\, f) = (h\, o\, g)\, o\, f$

(iv) मान लीजिए कि $f: X \to Y$ तथा $g: Y \to Z$ दो व्युत्क्रमणीय फलन हैं तो $g\, o\, f$ भी व्युत्क्रमणीय होता है, इस प्रकार कि $(g\, o\, f)^{-1} = f^{-1}\, o\, g^{-1}$.

1.1.6 द्वि-आधारी संक्रियाएँ

(i) किसी समुच्चय A में एक द्वि-आधारी संक्रिया $*$ एक फलन $*: A \times A \to A$.है। हम $*(a, b)$ को $a * b$ द्वारा निरूपित करते हैं।

(ii) समुच्चय X में एक द्वि-आधारी संक्रिया $*$ क्रम-विनिमेय कहलाती है, यदि प्रत्येक $a, b \in X$ के लिए $a * b = b * a$

(iii) एक द्वि-आधारी संक्रिया $* : A \times A \to A$ साहचर्य कहलाती है, यदि प्रत्येक $a, b, c \in A$ के लिए $(a * b) * c = a * (b * c)$

(iv) किसी प्रदत्त द्वि-आधारी संक्रिया $* : A \times A \to A$ के लिए, एक अवयव $e \in A$, यदि इसका अस्तित्व है, संक्रिया $*$ का तत्समक (identity) कहलाता है, यदि $a * e = a = e * a, \forall\ a \in A$

(v) A में तत्समक अवयव e वाले प्रदत्त एक द्वि-आधारी संक्रिया $* : A \times A \to A$, के लिए, किसी अवयव $a \in A$ को संक्रिया $*$ के संदर्भ में व्युत्क्रमणीय कहते हैं, यदि A में एक ऐसे अवयव b का अस्तित्व इस प्रकार है कि $a * b = e = b * a$ तथा b को a का प्रतिलोम (inverse) कहते हैं और जिसे प्रतीक a^{-1} द्वारा निरूपित करते हैं।

1.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय (S.A.)

उदाहरण 1 मान लीजिए कि $A = \{0, 1, 2, 3\}$ तथा A में एक संबंध R निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित कीजिए:

$$R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 3)\}$$

क्या R स्वतुल्य, सममित, संक्रामक है?

हल R स्वतुल्य तथा सममित है, परंतु संक्रामक नहीं है, क्योंकि $(1, 0) \in R$ तथा $(0, 3) \in R$ जब कि $(1, 3) \notin R$

उदाहरण 2 समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$, के लिए एक संबंध R नीचे लिखे अनुसार परिभाषित कीजिए:

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3)\}$$

उन क्रमित युग्मों को लिखिए, जिनको R में जोड़ने से वह न्यूनतम (छोटे से छोटा) तुल्यता संबंध बन जाए।

हल (3, 1) एक अकेला क्रमित युग्म है जिसको R में जोड़ने से वह छोटे से छोटा तुल्यता संबंध बन जाता है।

उदाहरण 3 मान लीजिए कि $R = \{(a, b) :$ संख्या $2, a - b$ को विभाजित करती है$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R पूर्णांकों के समुच्चय **Z** में तुल्यता संबंध है। तुल्यता-वर्ग [0] लिखिए।

हल $[0] = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, ...\}$

उदाहरण 4 मान लीजिए कि फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 4x - 1, \forall\ x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित है, तो सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है।

हल किन्हीं दो अवयव $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, इस प्रकार कि $f(x_1) = f(x_2)$, के लिए

$$4x_1 - 1 = 4x_2 - 1$$

$$\Rightarrow \quad 4x_1 = 4x_2, \text{ अर्थात् } x_1 = x_2$$

अत: f एकैकी है।

उदाहरण 5 यदि $f = \{(5, 2), (6, 3)\}$, $g = \{(2, 5), (3, 6)\}$, तो $f \circ g$ लिखिए।

हल $f \circ g = \{(2, 2), (3, 3)\}$

उदाहरण 6 मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x - 3 \;\forall\; x \in \mathbf{R}$. द्वारा परिभाषित एक फलन है, तो f^{-1} लिखिए।

हल दिया हुआ है कि $f(x) = 4x - 3 = y$, (मान लीजिए), तो

$$4x = y + 3$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{y+3}{4}$$

अत: $$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{4}$$

उदाहरण 7 क्या $\mathbf{Z}$ (पूर्णांकों का समुच्चय) में $m * n = m - n + mn \;\forall\; m, n \in \mathbf{Z}$ द्वारा परिभाषित द्विआधारी-संक्रिया $*$ क्रम-विनिमेय है?

हल $*$ क्रमविनिमेय नहीं है, क्योंकि $1, 2 \in \mathbf{Z}$ तथा $1 * 2 = 1 - 2 + 1.2 = 1$ जब कि $2 * 1 = 2 - 1 + 2.1 = 3$ इस प्रकार $1 * 2 \neq 2 * 1$.

उदाहरण 8 यदि $f = \{(5, 2), (6, 3)\}$ तथा $g = \{(2, 5), (3, 6)\}$, तो f तथा g के परिसर लिखिए।

हल f का परिसर $\{2, 3\}$ तथा g का परिसर $= \{5, 6\}$

उदाहरण 9 यदि $A = \{1, 2, 3\}$ तथा f, g, $A \times A$ के उप-समुच्चय के संग निम्नलिखित प्रकार सूचित संबंध हैं

$$f = \{(1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$$

$$g = \{(1, 2), (1, 3), (3, 1)\}$$

f तथा g में से कौन फलन है और क्यों?

हल f एक फलन है क्योंकि क्रमित युग्मों में प्रथम स्थान (घटक) में A का प्रत्येक अवयव द्वितीय स्थान (घटक) में A के केवल एक ही अवयव से संबंधित है जब कि g एक फलन नहीं है क्योंकि 1, A के एक से अधिक अवयवों से संबंधित है, नामत: 2 तथा 3 से।

उदाहरण 10 यदि $A = \{a, b, c, d\}$ तथा $f = \{a, b), (b, d), (c, a), (d, c)\}$ तो सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है तथा A से A पर आच्छादी है। f^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

हल f एकैकी है, क्योंकि A का प्रत्येक अवयव समुच्चय A के एक अद्वितीय अवयव से निर्दिष्ट (संबंधित) है। साथ ही f आच्छादी है, क्योंकि $f(A) = A$ । इसके अतिरिक्त $f^{-1} = \{(b, a), (d, b), (a, c), (c, d)\}$.

उदाहरण 11 प्राकृत संख्याओं के समुच्चय **N** में $m * n = g.c.d\ (m, n), m, n \in \mathbf{N}$ द्वारा द्वि–आधारी–संक्रिया $*$ परिभाषित कीजिए। क्या संक्रिया $*$ क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है?

हल संक्रिया स्पष्टत: क्रम–विनिमेय है, क्योंकि

$$m * n = g.c.d\ (m, n) = g.c.d\ (n, m) = n * m \quad \forall\, m, n \in \mathbf{N}$$

यह साहचर्य भी है, क्योंकि $l, m, n \in \mathbf{N}$ के लिए,

$$\begin{aligned} l * (m * n) &= g.\ c.\ d\ (l, g.c.d\ (m, n)) \\ &= g.c.d.\ (g.\ c.\ d\ (l, m), n) \\ &= (l * m) * n \end{aligned}$$

दीर्घ उत्तरीय (L.A)

उदाहरण 12 प्राकृत संख्याओं के समुच्चय **N** में एक संबंध R निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित कीजिए:

$\forall\, n, m \in \mathbf{N}$, $n\text{R}m$ यदि n तथा m में से प्रत्येक संख्या को 5 से विभाजित करने पर शेषफल 5 से कम बचता है, अर्थात्, 0, 1, 2, 3 तथा 4 में से कोई एक संख्या। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है। साथ ही R द्वारा निर्धारित युगलत: असंयुक्त उप–समुच्चयों को भी ज्ञात कीजिए।

हल R स्वतुल्य है, क्योंकि प्रत्येक $a \in \mathbf{N}$ के लिए $a\text{R}a$, R सममित है, क्योंकि $a, b, \in \mathbf{N}$ के लिए, यदि $a\text{R}b$, तथा $b\text{R}a = 54\pm$, साथ ही, R संक्रामक है, क्योंकि $a, b, c \in \mathbf{N}$ के लिए, यदि $a\text{R}b$ तथा $a\text{R}c$ तो $a\text{R}c$ अत: R, N में एक तुल्यता संबंध है, जो समुच्चय **N** का युगलत: असंयुक्त उपसमुच्चयों में विभाजन (partition) कर देता है। इस विभाजन से प्राप्त तुल्यता–वर्ग नीचे उल्लिखित हैं:

$A_0 = \{5, 10, 15, 20\ ...\}$

$A_1 = \{1, 6, 11, 16, 21\ ...\}$

$A_2 = \{2, 7, 12, 17, 22, ...\}$

$A_3 = \{3, 8, 13, 18, 23, ...\}$

$A_4 = \{4, 9, 14, 19, 24, ...\}$

यह सुस्पष्ट है कि उपर्युक्त पाँच समुच्च्य युगलत: असंयुक्त हैं तथा

$$A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \bigcup_{i=0}^{4} A_i = \mathbf{N}$$

उदाहरण 13 सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}, \forall x \in \mathbf{R}$, द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ न तो एकैकी है और न आच्छादी है।

हल $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, के लिए विचार कीजिए कि

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_1^2+1} = \frac{x_2}{x_2^2+1}$$

$$\Rightarrow x_1 x_2^2 + x_1 = x_2 x_1^2 + x_2$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 (x_2 - x_1) = x_2 - x_1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ या } x_1 x_2 = 1$$

हम देखते हैं कि x_1 तथा x_2 ऐसे दो अवयव हो सकते हैं कि $x_1 \neq x_2$ फिर भी $f(x_1) = f(x_2)$, उदाहरणार्थ हम $x_1 = 2$ तथा $x_2 = \dfrac{1}{2}$, लेते हैं, तो $f(x_1) = \dfrac{2}{5}$ तथा $f(x_2) = \dfrac{2}{5}$ परंतु $2 \neq \dfrac{1}{2}$ अतः f एकैकी नहीं है। साथ ही, f आच्छादी भी नहीं है क्योंकि, यदि ऐसा है, तो $1 \in \mathbf{R}$ के लिए $\exists\, x \in \mathbf{R}$ इस प्रकार कि $f(x) = 1$, जिससे $\dfrac{x}{x^2+1} = 1$ प्राप्त होता है। परंतु प्रांत $\mathbf{R}$ में ऐसा कोई अवयव नहीं है क्योंकि समीकरण $x^2 - x + 1 = 0$, x का कोई वास्तविक मान नहीं देता है।

उदाहरण 14 मान लीजिए कि $f(x) = |x| + x$ तथा $g(x) = |x| - x \;\; \forall\, x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित f, $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ दो फलन हैं, तो fog तथा gof ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $f(x) = |x| + x$ जिसे निम्नलिखित प्रकार से पुनः परिभाषित कर सकते हैं:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{यदि } x \geq 0 \\ 0 & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

इसी प्रकार, $g(x) = |x| - x$ द्वारा परिभाषित फलन g निम्नलिखित प्रकार से पुनः परिभाषित किया जा सकता है,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{यदि } x \geq 0 \\ -2x & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

इसलिए $g\,o\,f$ निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित होगा:

$x \geq 0$ के लिए, $(g\,o\,f)\,(x) = g\,(f\,(x) = g\,(2x) = 0$

तथा $x < 0$, के लिए $(g\,o\,f)\,(x) = g\,(f\,(x) = g\,(0) = 0$

फलस्वरूप, $(g\,o\,f)\,(x) = 0, \;\forall\; x \in \mathbf{R}$.

इसी प्रकार $f\,o\,g$ निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित होता है:

$x \geq 0$ के लिए, $(f\,o\,g)\,(x) = f\,(g\,(x) = f\,(0) = 0$ तथा

$x < 0$ के लिए, $(f\,o\,g)\,(x) = f\,(g(x)) = f\,(-2\,x) = -\,4x$

अर्थात्, $(f\,o\,g)\,(x) = \begin{cases} 0, x > 0 \\ -4x, x < 0 \end{cases}$

उदारण 15 मान लीजिए कि $\mathbf{R}$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ एक फलन है, जो $f\,(x) = 4x + 5$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है तथा f^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है: $f\,(x) = 4x + 5 = y$ (मान लीजिए), तो

$$4x = y - 5 \quad \text{या} \quad x = \frac{y-5}{4}$$

जिससे $g\,(y) = \dfrac{y-5}{4}$ द्वारा परिभाषित एक फलन $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ मिलता है।

इसलिए $\quad (g\,o\,f)\,(x) = g(f\,(x) \quad = g\,(4x + 5)$

$$= \frac{4x+5-5}{4} = x$$

या $\quad g\,o\,f = I_R$

इसी प्रकार $\quad (f\,o\,g)\,(y) = f\,(g(y))$

$$= f\left(\frac{y-5}{4}\right)$$

$$= 4\left(\frac{y-5}{4}\right)+5 = y$$

या $$f\,o\,g = I_R.$$

अत: f व्युत्क्रमणीय है तथा $f^{-1} = g$, जिससे $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{4}$ मिलता है।

उदाहरण 16 मान लीजिए कि Q में परिभाषित $*$ एक द्वि-आधारी संक्रिया है। ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित द्वि-आधारी संक्रियाओं में से कौन-कौन साहचर्य हैं:

(i) $a, b \in \mathbf{Q}$ के लिए $a * b = a - b$

(ii) $a, b \in \mathbf{Q}$ के लिए $a * b = \frac{ab}{4}$

(iii) $a, b \in \mathbf{Q}$ के लिए $a * b = a - b + ab$

(iv) $a, b \in \mathbf{Q}$ के लिए $a * b = ab^2$

हल

(i) $*$ साहचर्य नहीं है, क्योंकि यदि हम $a = 1, b = 2$ तथा $c = 3$, लेते हैं, तो

$(a * b) * c = (1 * 2) * 3 = (1 - 2) * 3 = -1 - 3 = -4$ तथा

$a * (b * c) = 1 * (2 * 3) = 1 * (2 - 3) = 1 - (-1) = 2$

अत: $(a * b) * c \neq a * (b * c)$ और इसलिए $*$ साहचर्य नहीं है।

(ii) $*$ साहचर्य है, क्योंकि $\mathbf{Q}$ में गुणन साहचर्य होता है।

(iii) $*$ साहचर्य नहीं है, क्योंकि यदि हम $a = 2, b = 3$ तथा $c = 4$ लेते हैं, तो

$(a * b) * c = (2 * 3) * 4 = (2 - 3 + 6) * 4 = 5 * 4 = 5 - 4 + 20 = 21$, तथा

$a * (b * c) = 2 * (3 * 4) = 2 * (3 - 4 + 12) = 2 * 11 = 2 - 11 + 22 = 13$

अत: $(a * b) * c \neq a * (b * c)$ और इसलिए $*$ साहचर्य नहीं है।

(iv) $*$ साहचर्य नहीं है, क्योंकि यदि हम $a = 1, b = 2$ तथा $c = 3$ लेते हैं, तो

$(a * b) * c = (1 * 2) * 3 = 4 * 3 = 4 \times 9 = 36$ तथा

$a * (b * c) = 1 * (2 * 3) = 1 * 18 = 1 \times 18^2 = 324$

अत: $(a * b) * c \neq a * (b * c)$ और इसलिए $*$ संक्रामक नहीं है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 17 से 25 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

उदाहरण 17 मान लीजिए कि R प्राकृत संख्याओं के समुच्चय **N** में एक संबंध है, जो $n\text{R}m$ यदि n विभाजित करता है m को, द्वारा परिभाषित है, तो R

(A) स्वतुल्य एवं सममित है। (B) संक्रामक एवं सममित है
(C) तुल्यता संबंध है (D) स्वतुल्य, संक्रामक है परंतु सममित नहीं है

हल सही विकल्प (D) है,
क्योंकि n विभाजित करता है n को, $\forall\ n \in \mathbf{N}$, तो R स्वतुल्य है। R सममित नहीं है, क्योंकि $3, 6 \in \mathbf{N}$ परंतु $^3\text{R}_6 \neq 6\ \text{R}\ 3$. R संक्रामक है, क्योंकि n, m, r के लिए जब-जब n/m तथा $m/r \Rightarrow n/r$, अर्थात्, जब-जब n विभाजित करता है r को।

उदाहरण 18 मान लीजिए कि L किसी समतल में स्थित सभी सरल रेखाओं के समुच्चय को निरूपित करता है। मान लीजिए कि एक संबंध R, नियम $l\text{R}m$ यदि और केवल यदि l लम्ब है m पर, $\forall\ l, m \in \text{L}$, द्वारा परिभाषित है। तब R

(A) स्वतुल्य है (B) सममित है (C) संक्रामक है (D) इनमें से कोई भी नहीं है

हल सही विकल्प (B) है।

उदाहरण 19 मान लीजिए कि **N** प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है तथा $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n) = 2n + 3\ \forall\ n \in \mathbf{N}$ द्वारा परिभाषित एक फलन है, तो f

(A) आच्छादी है (B) एकैक है (C) एकैकी आच्छादी है (D)इनमें से कोई भी नहीं है

हल (B) सही विकल्प है।

उदाहरण 20 समुच्चय A में 3 अवयव हैं तथा समुच्चय B में 4 अवयव हैं, तो A से B में परिभाषित एकैक प्रतिचित्रणों की संख्या

(A) 144 (B) 12 (C) 24 (D) 64

हल सही विकल्प (C) है। 3 अवयव वाले समुच्चय से 4 अवयव वाले समुच्चय में एकैक प्रतिचित्रणों की कुल संख्या $^4P_3$ है। अर्थात् $4! = 24$

उदाहरण 21 मान लीजिए कि $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$ तथा $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $g(x) = x^2$, द्वारा परिभाषित हैं, तो $f \circ g$

(A) $x^2 \sin x$ (B) $(\sin x)^2$ (C) $\sin x^2$ (D) $\frac{\sin x}{x^2}$

हल (C) सही विकल्प है।

उदाहरण 22 मान लीजिए कि $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 4$, द्वारा परिभाषित है, तो $f^{-1}(x)$

(A) $\frac{x+4}{3}$ (B) $\frac{x}{3} - 4$ (C) $3x + 4$ (D) इनमें से कोई नहीं है।

हल (A) सही विकल्प है।

उदाहरण 23 मान लीजिए कि $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ द्वारा परिभाषित है, तो 17 तथा –3 के पूर्व प्रतिबिम्ब क्रमश:.

(A) $\phi, \{4, -4\}$ (B) $\{3, -3\}$ (C) $\{4, -4\}, \phi$ (D) $\{4, -4\}, \{2, -2\}$ है।

हल (C) सही विकल्प है, क्योंकि $f^{-1}(17) = x \Rightarrow f(x) = 17$ या $x^2 + 1 = 17 \Rightarrow x = \pm 4$ या $f^{-1}(17) = \{4, -4\}$ तथा $f^{-1}(-3)$ के लिए, $f^{-1}(-3) = x \Rightarrow f(x) = -3 \Rightarrow x^2 + 1 = -3 \Rightarrow x^2 = -4$ अत: $f^{-1}(-3) = \phi$

उदाहरण 24 वास्तविक संख्याओं x तथा y के लिए परिभाषित कीजिए कि xRy, यदि और केवल यदि $x - y + \sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है, तो संबंध R

(A) स्वतुल्य है (B) सममित है (C) संक्रामक है (D) इनमें से कोई भी नहीं है

हल (A) सही विकल्प है।

उदाहरण 25 से 30 तक प्रत्येक में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।

उदाहरण 25 समुच्चय A = {1, 2, 3} पर विचार कीजिए तथा R, A में छोटे से छोटा तुल्यता संबंध है, तो R = ________

हल R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)}.

उदाहरण 26 $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ का प्रांत ________है।

हल यहाँ $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

$\Rightarrow (x - 1)(x - 2) \geq 0$

$\Rightarrow x \leq 1$ या $x \geq 2$

अत: f का प्रांत $= (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

उदाहरण 27 n अवयवों वाले समुच्चय A पर विचार कीजिए। A से स्वयं A पर एकैकी आच्छादक फलनों की कुल संख्या ________है।

हल $n!$

उदाहरण 28 मान लीजिए कि **Z** पूर्णांकों का समुच्चय है तथा R, **Z** में परिभाषित एक संबंध इस प्रकार है कि aRb, यदि $a - b$ भाज्य है 3 से, तो R समुच्चय Z को ________ युगलत: असंयुक्त उप-समुच्चयों में विभाजन करता है।

हल तीन

उदाहरण 29 मान लीजिए कि **R** वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा **R** में एक द्वि-आधारी संक्रिया $*$ इस प्रकार परिभाषित है कि $a * b = a + b - ab \quad \forall\ a, b \in \mathbf{R}$. तो द्वि-आधारी संक्रिया $*$ के लिए तत्समक अवयव_______है।

हल द्वि-आधारी सक्रिया $*$ के लिए तत्समक अवयव 0 है।

उदाहरण 30 से 34 तक प्रत्येक में प्रदत्त कथन सत्य हैं या असत्य हैं-

उदाहरण 30 समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ तथा संबंध $R = \{(1, 2), (1, 3)\}$ पर विचार कीजिए। R एक संक्रामक संबंध है।

हल सत्य है।

उदाहरण 31 मान लीजिए कि A एक परिमित समुच्चय है, तो A से स्वयं A में प्रत्येक एकैक फलन आच्छादी नहीं है।

हल असत्य है।

उदाहरण 32 समुच्चय A, B तथा C के लिए, मान लीजिए कि $f : A \to B$, $g : B \to C$ फलन इस प्रकार के हैं कि फलन $g\,o\,f$ एकैक है, तो f तथा g दोनों ही एकैक फलन हैं।

हल असत्य है।

उदाहरण 33 समुच्चय A, B तथा C के लिए, मान लीजिए कि $f : A \to B$, $g : B \to C$ फलन इस प्रकार के हैं कि फलन $g\,o\,f$ आच्छादी है, तो g भी आच्छादी है।

हल सत्य है।

उदाहरण 34 मान लीजिए कि **N** प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है, तो $a * b = a + b,\ \forall\ a, b \in \mathbf{N}$ द्वारा **N** में परिभाषित द्वि-आधारी संक्रिया $*$ के लिए तत्समक अवयव है।

हल असत्य है।

1.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (SA)

1. मान लीजिए कि $A = \{a, b, c\}$ तथा A में परिभाषित संबंध R निम्नलिखित है:
$R = \{(a, a), (b, c), (a, b)\}$. तो उन क्रमित युग्मों की, कम से कम, संख्या लिखिए, जिनको R में जोड़ने से R स्वतुल्य तथा संक्रामक बन जाता है।

2. मान लीजिए कि D, $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ द्वारा परिभाषित, वास्तविक मान फलन f का प्रांत है, तो D को लिखिए।

3. मान लीजिए कि $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ क्रमशः $f(x) = 2x + 1$ तथा $g(x) = x^2 - 2, \forall x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित हैं, तो $g\,o\,f$ ज्ञात कीजिए।

4. मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ फलन $f(x) = 2x - 3\ \forall x \in \text{R}$ द्वारा परिभाषित है। f^{-1} लिखिए।

5. यदि $\text{A} = \{a, b, c, d\}$ तथा फलन $f = \{(a, b), (b, d), (c, a), (d, c)\}$, तो f^{-1} लिखिए।

6. यदि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$ द्वारा परिभाषित है, तो $f(f(x))$ लिखिए।

7. क्या $g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ एक फलन है? यदि g, $g(x) = \alpha x + \beta$ द्वारा वर्णित है, तो α तथा β का मान क्या निर्धारित होना चाहिए?

8. क्या क्रमित युग्मों के निम्नलिखित समुच्चय, फलन हैं? यदि ऐसा है, तो जाँच कीजिए कि प्रतिचित्रण एकैक अथवा आच्छादी हैं कि नहीं हैं।

(i) $\{(x, y)$: x एक व्यक्ति है, y माँ है x की$\}$

(ii) $\{(a, b)$: a एक व्यक्ति है, b पूर्वज है a का$\}$

9. यदि प्रतिचित्रण f तथा g क्रमशः $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$ तथा $g = \{(2, 3), (5, 1), (1, 3)\}$ द्वारा दत्त हैं, तो $f\,o\,g$ लिखिए।

10. मान लीजिए कि **C** सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय है। सिद्ध कीजिए कि $f(z) = |z|, \forall z \in \mathbf{C}$ द्वारा दत्त प्रतिचित्रण $f : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ न तो एकैकी है और न आच्छादक (आच्छादी) है।

11. मान लीजिए कि फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \cos x, \forall x \in \mathbf{R}$, द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि f न तो एकैकी है और न आच्छादक (आच्छादी) है।

12. मान लीजिए कि $\text{X} = \{1, 2, 3\}$ तथा $\text{Y} = \{4, 5\}$. ज्ञात कीजिए कि क्या $\text{X} \times \text{Y}$ के निम्नलिखित उपसमुच्चय X से Y में फलन हैं या नहीं हैं।

(i) $f = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 5)\}$ (ii) $g = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

(iii) $h = \{(1,4), (2, 5), (3, 5)\}$ (iv) $k = \{(1,4), (2, 5)\}$

13. यदि फलन $f : \text{A} \to \text{B}$ तथा $g : \text{B} \to \text{A}$, $g\,o\,f = \text{I}_\text{A}$ को संतुष्ट करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि f एकैक है तथा g आच्छादक है।

14. मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2 - \cos x}\ \forall x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित एक फलन है, तो f का परिसर ज्ञात कीजिए।

15. मान लीजिए कि n एक निश्चित (स्थिर) धन पूर्णांक है। **Z** में एक संबंध R निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित कीजिए: $\forall a, b \in \mathbf{Z}$, $a\text{R}b$ यदि और केवल यदि $a - b$ भाज्य है n से। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

16. यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$, तो A में निम्नलिखित गुणों वाले संबंधों को परिभाषित कीजिए:

(a) स्वतुल्य तथा संक्रामक हों किंतु सममित नहीं हों।

(b) सममित हों परन्तु न तो स्वतुल्य हों और न संक्रामक हों।

(c) स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक हों।

17. मान लीजिए कि R, प्राकृत संख्याओं के समुच्चय **N** में निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित एक संबंध है।

$R = \{(x, y): x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}, 2x + y = 41\}$. संबंध R का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए। साथ ही सत्यापित (जाँच) कीजिए कि क्या R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है।

18. दिया हुआ है कि $A = \{2, 3, 4\}, B = \{2, 5, 6, 7\}$ निम्नलिखित में से प्रत्येक के एक उदाहरण की रचना कीजिए:

(a) A से B में एक एकैक प्रतिचित्रण।

(b) A से B में एक ऐसा प्रतिचित्रण, जो एकैक नहीं है।

(c) B से A में एक प्रतिचित्रण।

19. एक ऐसे प्रतिचित्रण का उदाहरण दीजिए जो–

(i) एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है।

(ii) एकैकी नहीं है किंतु आच्छादक है।

(iii) न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

20. मान लीजिए कि $A = \mathbf{R} - \{3\}, B = \mathbf{R} - \{1\}$. मान लीजिए कि $f: A \to B$, $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ $\forall x \in A$ द्वारा परिभाषित है, तो सिद्ध कीजिए कि f एकैकी आच्छादी है।

21. मान लीजिए कि $A = [-1, 1]$, तो विचार कीजिए कि क्या A में परिभाषित निम्नलिखित फलन एकैकी, आच्छादक या एकैकी आच्छादी हैं:

(i) $f(x) = \frac{x}{2}$ (ii) $g(x) = |x|$ (iii) $h(x) = x|x|$ (iv) $k(x) = x^2$

22. निम्नलिखित में से प्रत्येक **N** में एक संबंध परिभाषित करते हैं:

(i) x बड़ा है y से, $x, y \in \mathbf{N}$ (ii) $x + y = 10, x, y \in \mathbf{N}$

(iii) $x\, y$ किसी पूर्णांक का वर्ग है, $x, y \in \mathbf{N}$ (iv) $x + 4y = 10$ $x, y \in \mathbf{N}$

निर्धारित कीजिए कि उपर्युक्त संबंधों में से कौन-से संबंध स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक हैं।

23. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, ... 9\}$ तथा $A \times A$ में $(a, b), (c, d)$ के लिए (a, b) R (c, d) यदि और केवल यदि $a + d = b + c$ द्वारा परिभाषित R एक संबंध है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है तथा तुल्यता-वर्ग $[(2, 5)]$ भी प्राप्त (ज्ञात) कीजिए।

24. परिभाषा का प्रयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि फलन $f: A \to B$ व्युत्क्रमणीय है, यदि और केवल यदि, f एकैकी तथा आच्छादक दोनो है।

25. फलन $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ क्रमशः $f(x) = x^2 + 3x + 1$ तथा $g(x) = 2x - 3$ द्वारा परिभाषित हैं, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) $f \circ g$ (ii) $g \circ f$ (iii) $f \circ f$ (iv) $g \circ g$

26. मान लीजिए कि एक द्वि-आधारीय संक्रिया $*$ **Q** में परिभाषित है। ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित द्वि-आधारी संक्रियाओं में से कौन-कौन सी संक्रियाएँ क्रम-विनिमेय हैं

(i) $a * b = a - b \ \forall \ a, b \in \mathbf{Q}$ (ii) $a * b = a^2 + b^2 \ \forall \ a, b \in \mathbf{Q}$

(iii) $a * b = a + ab \ \forall \ a, b \in \mathbf{Q}$ (iv) $a * b = (a - b)^2 \ \forall \ a, b \in \mathbf{Q}$

27. मान लीजिए कि R में द्वि-आधारी संक्रिया $*$, $a * b = 1 + ab, \forall \ a, b \in \mathbf{R}$. तो संक्रिया $*$

(i) क्रम-विनिमेय है किंतु साहचर्य नहीं है। (ii)साहचर्य है किंतु क्रम-विनिमेय नहीं है।

(iii) न तो क्रम-विनिमेय है और न साहचर्य है। (iv)क्रम-विनिमेय तथा साहचर्य दोनों ही है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न संख्या 28 से 47 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए-

28. मान लीजिए कि T, युक्लिडीय समतल में, सभी त्रिभुजों का समुच्चय है तथा मान लीजिए कि T में एक संबंध R इस प्रकार परिभाषित है कि $a\text{R}b$, यदि a सर्वांगसम है b के, $\forall \ a, b \in$ T, तो R

(A) स्वतुल्य है किंतु संक्रामक नहीं है। (B) संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।

(C) तुल्यता संबंध है। (D) इनमें से कोई नहीं है।

29. किसी परिवार में बच्चों के अरिक्त समुच्चय तथा $a\text{R}b$, यदि a भाई है b का, द्वारा परिभाषित संबंध R पर विचार कीजिए, तो R

(A) सममित है किन्तु संक्रामक नहीं है। (B) संक्रामक है किन्तु सममित नही है।

(C) न तो सममित है और न संक्रामक है (D) सममित तथा संक्रामक दोनों है।

30. समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ में तुल्यता संबंधों की अधिकतम संख्या

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 है।

31. यदि समुच्चय {1, 2, 3} में R = {(1, 2)} द्वारा परिभाषित एक संबंध R है, तो R

(A) स्वतुल्य है (B) संक्रामक है (C) सममित है (D)इनमें से कोई भी नहीं है

32. मान लीजिए कि हम R में एक संबंध **R** इस प्रकार परिभाषित करें कि $a\text{R}b$, यदि $a \geq b$, तो R

(A) एक तुल्यता संबंध है

(B) स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है

(C) सममित तथा संक्रामक है किंतु स्वतुल्य नहीं हैं

(D) न तो संक्रामक है और न स्वतुल्य है किंतु सममित है

33. मान लीजिए कि A = {1, 2, 3} संबंध R = {1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1,3)} पर विचार कीजिए, तो R

(A) स्वतुल्य है किंतु सममित नहीं है

(B) स्वतुल्य है किंतु संक्रामक नहीं है

(C) सममित तथा संक्रामक है

(D) न तो सममित है और न संक्रामक है

34. Q ~ {0} में $a * b = \dfrac{ab}{2}$ $\forall\, a, b \in$ Q ~ {0} प्रकार से परिभाषित द्वि-आधारी संक्रिया $*$ का (के लिए) तत्सम अवयव

(A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं है।

35. यदि समुच्चय A में 5 अवयव हैं तथा समुच्चय B में 6 अवयव हैं, तो A से B में एकैकी तथा आच्छादक प्रतिचित्रणों की संख्या

(A) 720 है (B) 120 है (C) 0 है (D) इनमें से कोई नहीं है

36. मान लीजिए कि A = {1, 2, 3, ...n} तथा B = {a, b} , तो A से B में आच्छादी प्रतिचित्रों (प्रतिचित्रणों) की संख्या

(A) ${}^{n}\text{P}_2$ है (B) $2^n - 2$ है (C) $2^n - 1$ है (D) इनमें से कोई नहीं है

37. मान लीजिए कि $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\forall\, x \in \mathbf{R}$ के द्वारा परिभाषित है, तो f

(A) एकैकी है (B)आच्छादक है (C) एकैकी आच्छादी है (D) f परिभाषित नहीं है

38. मान लीजिए कि $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x^2 - 5$ द्वारा तथा $g: \text{R} \to \mathbf{R}$ $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ द्वारा परिभाषित है, तो $g\,o\,f$ निम्नलिखित है,

(A) $\dfrac{3x^2-5}{9x^4-30x^2+26}$ (B) $\dfrac{3x^2-5}{9x^4-6x^2+26}$ (C) $\dfrac{3x^2}{x^4+2x^2-4}$ (D) $\dfrac{3x^2}{9x^4+30x^2-2}$

39. **Z** से **Z** में निम्नलिखित फलनों से कौन-से एकैकी आच्छादी हैं?

(A) $f(x) = x^3$ (B) $f(x) = x + 2$ (C) $f(x) = 2x + 1$ (D) $f(x) = x^2 + 1$

40. मान लीजिए कि $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^3 + 5$ द्वारा परिभाषित एक फलन है, तो $f^{-1}(x)$ निम्नलिखित है,

(A) $(x+5)^{\frac{1}{3}}$ (B) $(x-5)^{\frac{1}{3}}$ (C) $(5-x)^{\frac{1}{3}}$ (D) $5 - x$

41. मान लीजिए कि $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ एकैकी आच्छादी फलन हैं, तो $(g\,o\,f)^{-1}$ निम्नलिखित है,

(A) $f^{-1}\,o\,g^{-1}$ (B) $f\ o\ g$ (C) $g^{-1}\,o\,f^{-1}$ (D) $g\ o\,f$

42. मान लीजिए कि $f: \mathbf{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{3x+2}{5x-3}$ द्वारा परिभाषित है, तो

(A) $f^{-1}(x) = f(x)$ (B) $f^{-1}(x) = -f(x)$

(C) $(f\,o\,f)\,x = -x$ (D) $f^{-1}(x) = \frac{1}{19}f(x)$

43. मान लीजिए कि $f: [0, 1] \to [0, 1],\ f(x) = \begin{bmatrix} x, \text{ यदि } x \text{ परिमेय है} \\ 1-x, \text{ यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{bmatrix}$ द्वारा परिभाषित है, तो $(f\,o\,f)\,x$

(A) अचर है (B) $1 + x$ है (C) x है (D) इनमें से कोई नहीं है

44. मान लीजिए कि $f: [2, \infty) \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2 - 4x + 5$ द्वारा परिभाषित एक फलन है, तो f का परिसर

(A) **R** है (B) $[1, \infty)$ है (C) $[4, \infty)$ है (D) $[5, \infty)$ है

45. मान लीजिए कि $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{2x-1}{2}$ द्वारा परिभाषित एक फलन है, तथा $g: \mathbf{Q} \to \mathbf{R},\ g(x) = x + 2$ द्वारा परिभाषित एक अन्य फलन है, तो $(g\,o\,f)\left(\frac{3}{2}\right)$

(A) 1 है (B) 1 है (C) $\frac{7}{2}$ है (D) इनमें से कोई नहीं है

46. मान लीजिए कि $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x : x > 3 \\ x^2 : 1 < x \le 3 \\ 3x : x \le 1 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है, तो $f(-1) + f(2) + f(4)$

(A) 9 है (B) 14 है (C) 5 है (D)इनमें से कोई नहीं है

47. मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \tan x$ द्वारा दत्त है, तो $f^{-1}(1)$

(A) $\frac{\pi}{4}$ है (B) $\{n\pi + \frac{\pi}{4} : n \in Z\}$ है

(C) का अस्तित्व नहीं है। (D) इनमें से कोई नहीं है

प्रश्न संख्या 48 से 52 तक प्रत्येक में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए–

48. मान लीजिए कि **N** में एक संबंध R, $a\mathrm{R}b$ यदि $2a + 3b = 30$ द्वारा परिभाषित है, तो R = _______.

49. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ में एक संबंध $R = \{(a, b) : |a^2 - b^2| < 8$ द्वारा परिभाषित है, तो R ________ द्वारा व्यक्त है।

50. मान लीजिए कि $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$ तथा $g = \{(2, 3), (5, 1), (1, 3)\}$ तो $g \circ f$ = _______ तथा $f \circ g$ = _______.

51. मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ द्वारा परिभाषित है, तो $(f \circ f \circ f)(x)$ = _______

52. यदि $f(x) = (4 - (x-7)^3\}$, तो $f^{-1}(x)$ = _____________.

बतलाइए कि प्रश्न संख्या 53 से 62 तक प्रत्येक के कथन सत्य हैं या असत्य हैं–

53. मान लीजिए कि समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ में परिभाषित एक संबंध $R = \{(3, 1), (1, 3), (3, 3)\}$, तो R सममित तथा संक्रामक है किंतु स्वतुल्य नहीं है।

54. मान लीजिए $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin(3x+2)$, $\forall x \in \mathrm{R}$ द्वारा परिभाषित एक फलन है, तो f व्युत्क्रमणीय है।

55. प्रत्येक संबंध जो सममित तथा संक्रामक है स्वतुल्य भी है।

56. एक पूर्णांक m एक अन्य पूर्णांक n से संबंधित कहलाता है, यदि m एक पूर्णांकीय गुणज है n का। **Z** में इस प्रकार का संबंध स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक होता है।

57. मान लीजिए कि $A = \{0, 1\}$ तथा **N** प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है, तो $f(2n-1) = 0$, $f(2n) = 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$ द्वारा परिभाषित प्रतिचित्रण $f : \mathbf{N} \to \mathrm{A}$ आच्छादक है।

58. समुच्चय A में, $R = \{\{1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ प्रकार से परिभाषित संबंध R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक है।

59. फलनों का संयोजन क्रम-विनिमेय होता है।

60. फलनों का संयोजन साहचर्य होता है।

61. प्रत्येक फलन व्युत्क्रमणीय होता है।

62. किसी समुच्चय में किसी द्वि-आधारी संक्रिया का तत्समक अवयव सदैव होता है।